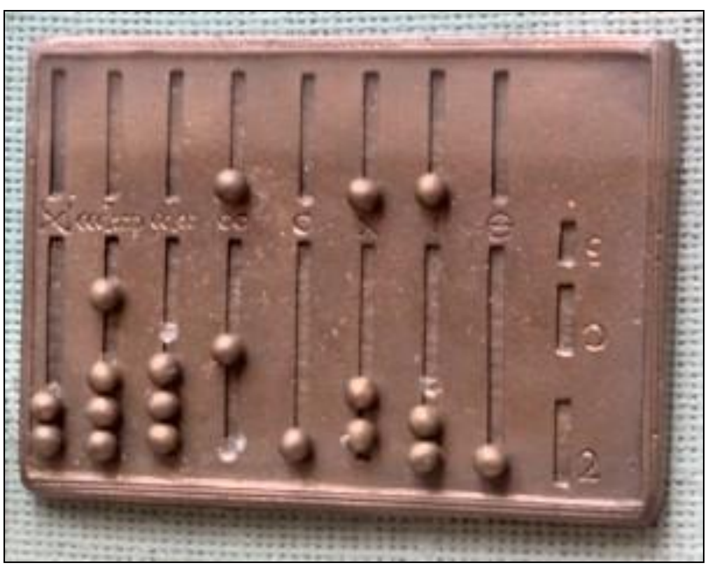
http://www.atuttoportale.it/


Lezioni di matematica a cura di *Eugenio Amitrano*

Argomento n.2

# Aritmetica:
# operazioni ed espressioni



**Ricostruzione di un abaco dell'epoca romana - Museo RGZ di Magonza (Germania)**

# Contenuti:



↔

# Introduzione

L'aritmetica è la più antica branca della matematica e studia le proprietà elementari delle operazioni sui numeri. Il termine "aritmetica" deriva dalla parola greca *arithmos* che significa *numero*. La sua semplicità è dovuta dal fatto che essa è utilizzata in molte attività quotidiane dell'uomo, come per esempio contare, calcolare la spesa ecc.

L'aritmetica si è evoluta con l'evolversi delle esigenze di calcolo del genere umano che tra l'altro corrispondono anche alla maturazione di un individuo. Già dai primi anni, un bambino matura l'esigenza di contare e di sommare le proprie cose. I bambini piccoli, dai tre ai cinque anni, sono la massima espressione di approvvigionamento individuale, infatti, sono curiosi, voglio tutto e voglio sapere tutto. Provate a chiedere ad un bambino di tre anni se vuole una caramella, quasi certamente risponderà che ne vuole due. Quindi inizialmente si imparano i numeri naturali e la loro somma. Subito dopo, contemporaneamente all'amicizia nasce nel bambino una componente altruistica, cioè sottrae qualcosa dai propri averi per donarla agli amici, così sviluppa anche un senso di mancanza e di privazione. Ed ecco la nascita dell'operazione di sottrazione dei numeri naturali e la nascita dei numeri relativi nei quali si contemplano anche i numeri negativi. La generosità e la condivisione aumentano col crescere, si dividono i frutti conquistati con la collaborazione e anche una sola caramella va divisa. Ed ecco nascere infine le divisioni e le frazioni.

Questa lezione non richiede quindi un impegno eccessivo, i contenuti saranno acquisiti con molta naturalezza nella maggioranza dei casi.

↔

# Concetto di operazione interna

Nel precedente argomento (Cenni di Insiemistica) abbiamo introdotto i principali insiemi numerici e le loro relative operazioni, quelle ben definite e non. Cercheremo ora di capire meglio che qualsiasi operazione ben definita è anche un'operazione interna, mentre non lo è un'operazione non ben definita.

Generalmente in matematica, un'operazione è una qualsiasi azione che se applicata su una coppia di elementi di un dato insieme detti **operandi**, questa produce un elemento detto **risultato dell'operazione**. A questo punto occorre fare un'importante considerazione, e cioè, se il risultato appartiene all'insieme di base (l'insieme al quale appartengono gli elementi su cui è stata applicata l'operazione), allora l'operazione si dirà **operazione interna**, altrimenti, tale operazione si dirà **operazione esterna**.

Questo concetto di operazione interna vale per qualsiasi sia la natura degli elementi, infatti, può valere anche per le figure geometriche. Ad esempio, proviamo a verificare se la seguente operazione tra elementi geometrici è un'operazione interna:

1) Consideriamo un insieme a cui appartengono i segmenti di tutte le lunghezze; (*Insieme di base*)

2) Consideriamo come operazione la somma di due segmenti;

3) Il risultato di tale operazione, cioè della somma dei due segmenti, è rappresentato da un terzo segmento lungo quanto i primi due messi insieme.

É facile verificare che questa è un'operazione interna, infatti, per qualsiasi coppia di segmenti iniziali, il risultato sarà un segmento di una certa lunghezza e quindi appartenente all'insieme di base.

Definizioni più rigorose di operazione interna, o meglio di **operazione binaria interna** poiché si applica solo su una coppia di operandi, possono essere le seguenti:

***Def.*** Un'operazione binaria interna su un insieme $A$ è una qualsiasi funzione od applicazione $f$ definita in $A \times A$ che ha valori in $A$. $f : A \times A \rightarrow A$

***Def.*** Un'operazione binaria interna su un insieme è una legge che associa ad ogni elemento del prodotto cartesiano dell'insieme, un elemento dell'insieme stesso.

Nei prossimi paragrafi saranno descritte le operazioni interne dei principali insiemi numerici e le relative proprietà, nonché, attraverso l’utilizzo di tali proprietà e le loro applicazioni, vedremo come gestire e risolvere calcoli più complessi come ad esempio le espressioni numeriche.

Sono escluse da questo argomento le operazioni sui numeri decimali e le operazioni su numeri complessi che saranno trattate nell’argomento che riguarderà la teoria dei numeri.

↔

# Operazioni aritmetiche con numeri naturali

Come precedentemente descritto nell'argomento-1, le operazioni ben definite nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, sono l'addizione e la moltiplicazione. Queste due operazioni forniscono come risultato un elemento interno ad $\mathbb{N}$.

## Addizione di numeri naturali

Per indicare lo svolgimento di un'operazione, tra i due elementi viene interposto un simbolo che indica appunto quale operazione vogliamo svolgere.

Nel caso dell'addizione il simbolo da usare è "+", che si legge "più", gli operandi sono chiamati **addendi** e il risultato è chiamato **somma**. Ad esempio nell'addizione $2+3=5$, i numeri 2 e 3 sono gli addendi mentre 5 è la somma di 2 e 3.

La somma è ottenuta aggiungendo alle unità del primo numero le unità del secondo numero.

Ricordiamo che tra i principali scopi della nascita dei numeri naturali c'è la necessità di quantificare gli oggetti contando appunto le unità, e calcolare la somma risulta proprio naturale come il contare.

## Moltiplicazione di numeri naturali

Il simbolo aritmetico per la moltiplicazione è "×" e si legge "per". Gli operandi sono chiamati **fattori** e il risultato è chiamato **prodotto**. Ad esempio nella moltiplicazione $3\times 4=12$, i numeri 3 e 4 sono i fattori mentre 12 è il prodotto di 3 e 4.

La moltiplicazione è anche definita l'operazione del sommare rapidamente più volte numeri uguali. Infatti, il prodotto si ottiene sommando tante volte il secondo fattore per quante unità costituiscono il primo fattore. Ad esempio nella moltiplicazione $3\times 4$, il primo fattore è 3, quindi devo sommare 3 volte il secondo fattore che è il 4, quindi:

$$3\times 4=\underbrace{4+4+4}_{3..volte}=8+4=12$$

In algebra il simbolo della moltiplicazione è rimpiazzato da un punto "·", poiché il simbolo "×" potrebbe facilmente essere confuso con la lettera "x".

# Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

## Proprietà commutativa:

**Def.**

*Per l'addizione:* In ogni addizione, cambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia.

*Per la moltiplicazione:* In ogni moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori il prodotto non cambia.

Esempio 1: $2+3=3+2=5$

Esempio 2: $3\times 4=4\times 3=12$

## Proprietà associativa:

**Def.**

*Per l'addizione:* In ogni addizione di tre addendi, il risultato non cambia se addizioniamo al terzo addendo la somma dei primi due, oppure se addizioniamo al primo addendo la somma del secondo e il terzo.

*Per la moltiplicazione:* In ogni moltiplicazione di tre fattori, il risultato non cambia se moltiplichiamo il terzo fattore con il prodotto dei primi due, oppure se moltiplichiamo il primo fattore con il prodotto del secondo e il terzo.

Esempio 1: $2+3+4=(2+3)+4=5+4=9$ oppure $2+3+4=2+(3+4)=2+7=9$

Esempio 2: $2\times 3\times 4=(2\times 3)\times 4=6\times 4=24$ oppure $2\times 3\times 4=2\times(3\times 4)=2\times 12=24$

## Proprietà distributiva:

**Def.**
La moltiplicazione di un qualsiasi numero per una somma, corrisponde alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ogni addendo per il numero iniziale.

Esempio: $2\times(3+4)=(2\times 3)+(2\times 4)=6+8=14$ infatti $2\times(3+4)=2\times 7=14$

## Esistenza dell'elemento neutro:

***Def.***
In un'operazione, quando il risultato corrisponde ad uno dei due operandi, l'altro operando si definisce elemento neutro.

Per l'addizione, l'elemento neutro è lo zero, infatti, se addizioniamo lo zero a qualsiasi numero, il risultato sarà proprio quel numero.

Esempio: $3+0=3$

Per la moltiplicazione invece, l'elemento neutro è l'uno, infatti, se moltiplichiamo per uno qualsiasi numero, il risultato sarà quel numero.

Esempio: $5\times1=5$

## Legge di annullamento del prodotto:

***Def.***
In qualsiasi moltiplicazione di due o più fattori, il prodotto sarà nullo (uguale a zero) se un qualsiasi fattore, o più di uno è uguale a zero.

Esempio 1: $4\times0=0$

Esempio 2: $2\times3\times0\times5=0$

## Sottrazione di numeri naturali

Il simbolo aritmetico per la sottrazione è "-" e si legge "meno". Gli operandi sono chiamati il primo **minuendo** e il secondo **sottraendo**, mentre il risultato è chiamato **differenza**. Ad esempio nella sottrazione $7-5=2$, il numero 7 è il minuendo, il numero 5 è il sottraendo, mentre 2 è la differenza di 7 da 5.

La differenza è ottenuta togliendo alle unità del primo numero (minuendo) le unità del secondo numero (sottraendo).

Calcolare la differenza tra due numeri naturali non è sempre possibile. Se il sottraendo è costituito da un numero di unità maggiore del minuendo, il risultato non è più un numero naturale. Ad esempio $3-5=?$ non ha un risultato naturale.

## Elevamento a potenza naturale di un numeri naturali

L'elevamento a potenza è un'operazione che non ha un simbolo aritmetico. Gli operandi sono chiamati **base** ed **esponente**. L'esponente lo si riconosce poiché si presenta come apice rispetto alla base. Ad esempio $2^3$, che si legge "*due elevato alla terza*", il numero 2 è la base mentre il numero 3 è l'esponente.

La potenza è l'operazione in cui si moltiplicano più volte numeri uguali. Infatti, si ottiene moltiplicando tante volte la base per quante unità costituiscono l'esponente.
Ad esempio nella potenza $2^3$, l'esponente è 3, quindi devo moltiplicare 3 volte la base che è il 2, quindi:

$$2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{3..volte} = 4 \times 2 = 8$$

Le principali proprietà delle potenze utili nell'aritmetica sono le seguenti:

Ogni numero naturale corrisponde alla sua prima potenza. (*prima potenza = elevato ad 1*)

Esempi: $2^1 = 2$, $3^1 = 3$, $5^1 = 5$, $2357^1 = 2357$

Ogni numero naturale maggiore di uno, elevato alla zero è uguale ad uno.

Esempi: $2^0 = 1$; $7^0 = 1$; $11^0 = 1$; $913.245.768^0 = 1$

Il prodotto di due potenze aventi la stessa base, corrisponde alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

Esempio: $2^2 \times 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$ Infatti, $2^2 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$ e $2^6 = 64$.

Il quoziente di due potenze aventi la stessa base, corrisponde alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

Esempio: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$ Infatti, $2^5 : 2^3 = 32 : 8 = 4$ e $2^2 = 4$.

*Altre proprietà delle potenze saranno descritte nell'introduzione al calcolo letterale.*

↔

# Operazioni aritmetiche con numeri interi

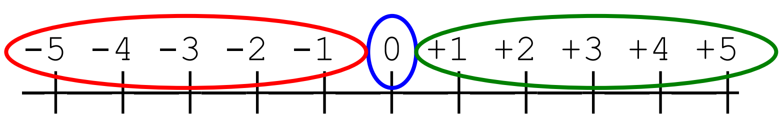
I numeri interi, ovvero i numeri relativi, sono i numeri con segno e si indicano con $\mathbb{Z}$, contengono i numeri negativi e sono nati per dare un risultato a qualsiasi sottrazione, infatti, sono anche definiti come l’insieme dei risultati delle sottrazioni dei numeri naturali. Per qui, le operazioni ben definite per questo insieme sono l’addizione, la moltiplicazione e la sottrazione.

Per l’addizione e la moltiplicazione, valgono le definizioni e le proprietà descritte nel precedente paragrafo, ma per il calcolo del risultato, occorre tener presente il fatto che questi numeri sono dotati di un segno.

Quando ad un numero non è presente il segno, si sottintende che questo sia positivo. Ad esempio 2 senza segno corrisponde a +2.

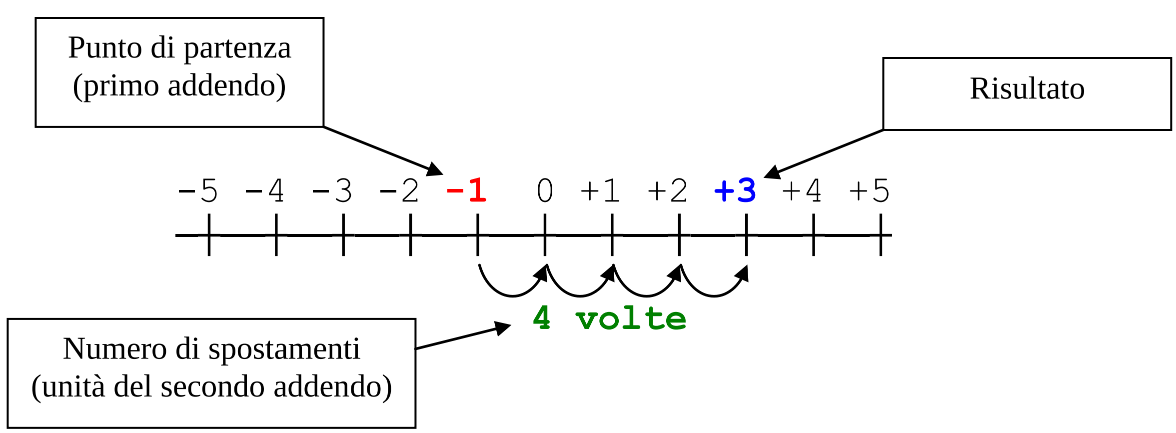
## Addizione di numeri interi

Per l’esecuzione dell’addizione, consideriamo i numeri relativi come se fossero punti su una retta. Al centro c’è lo zero, alla sinistra dello zero ci sono i numeri negativi mentre alla destra i numeri positivi:



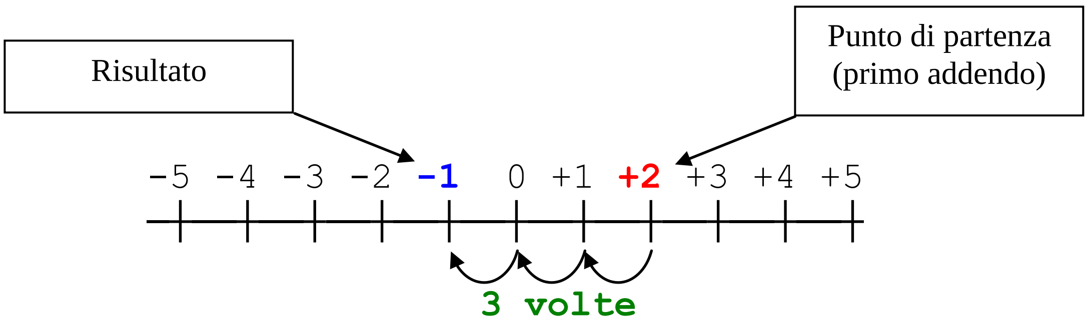

**Addizione con un numero positivo:**
Ci posizioniamo nel punto sulla retta rappresentato da primo addendo e ci spostiamo a **destra** di tante unità per quante unità costituiscono il secondo addendo:

Esempio: $-1+(+4)=+3$



**Addizione con un numero negativo:**
Come per il caso precedente, ci posizioniamo nel punto sulla retta rappresentato dal primo addendo e ci spostiamo a **sinistra** di tante unità per quante unità costituiscono il secondo addendo:

Esempio: $+2+(-3)=-1$

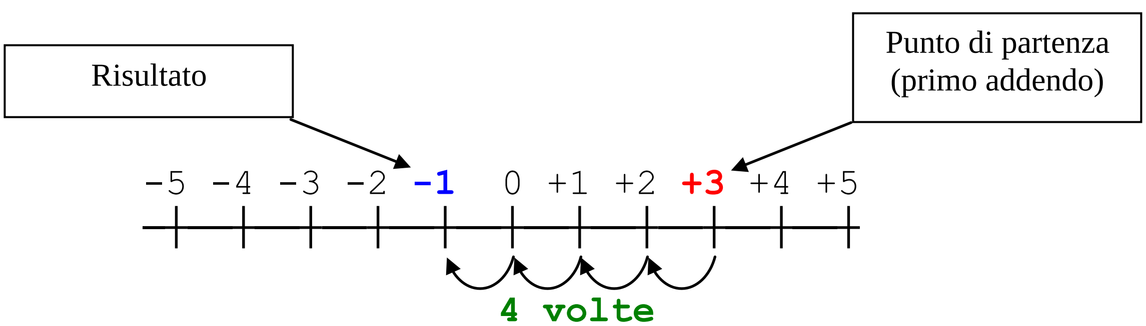



## Sottrazione di numeri interi

Per l'esecuzione della sottrazione, consideriamo come per l'addizione i numeri relativi come se fossero punti su una retta e anche qui distinguiamo due casi:

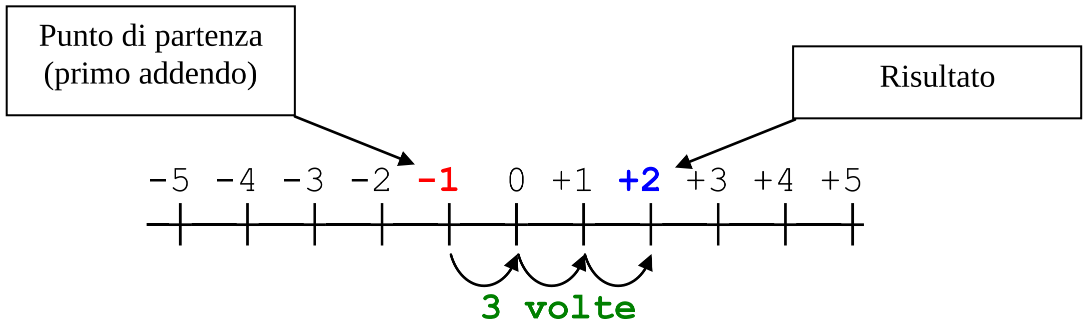
**Sottraendo positivo:**
Ci posizioniamo nel punto sulla retta rappresentato dal minuendo e ci spostiamo a **sinistra** di tante unità per quante unità costituiscono il sottraendo:

Esempio: $+3-(+4)=-1$




**Sottraendo negativo:**
Come per il caso precedente, ci posizioniamo nel punto sulla retta rappresentato dal minuendo e ci spostiamo a **destra** di tante unità per quante unità costituiscono il sottraendo:

Esempio: $-1-(-3)=+2$




Per la sottrazione vale la seguente proprietà:

**Proprietà invariantiva:**

***Def.***
In ogni sottrazione, aggiungendo uno stesso valore sia al minuendo che al sottraendo, la differenza non cambia.

Esempio: $+2-(-3)=+5$

Aggiungiamo $4$ unità sia al minuendo che al sottraendo:

$+2+4=+6$ *Nuovo minuendo*
$-3+4=+1$ *Nuovo sottraendo*

Calcoliamo la differenza tra il nuovo minuendo e il nuovo sottraendo:

$+6-(+1)=+5$ *Il risultato non cambia!*

## Moltiplicazione di numeri interi

Come per l'addizione e la sottrazione, nella moltiplicazione dobbiamo tener conto dei segni degli operandi e per costruire il risultato della moltiplicazione, dobbiamo eseguire due operazioni:

1. La moltiplicazione dei segni
2. La moltiplicazione dei moduli (numeri privati del segno)

La moltiplicazione dei segni serve per determinare il segno del risultato che è dato dalla seguente regola:

I segni concordi dei fattori danno risultato positivo: $(+)\times(+)=(+)$ e $(-)\times(-)=(+)$
I segni discordi invece danno risultato negativo: $(+)\times(-)=(-)$ e $(-)\times(+)=(-)$

La moltiplicazione dei moduli, invece va eseguita nello stesso modo dei numeri naturali.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Esempio 1: | $+2\times(+3)=+6$ | infatti | $(+)\times(+)=(+)$ | e | $2\times3=6$ |
| Esempio 2: | $-3\times(-4)=+12$ | infatti | $(-)\times(-)=(+)$ | e | $3\times4=12$ |
| Esempio 3: | $+2\times(-4)=-8$ | infatti | $(+)\times(-)=(-)$ | e | $2\times4=8$ |
| Esempio 4: | $-4\times(+3)=-12$ | infatti | $(-)\times(+)=(-)$ | e | $4\times3=12$ |

## Divisione di numeri interi

Il simbolo aritmetico per la divisione è ":" e si legge "diviso". Gli operandi sono chiamati il primo **dividendo** e il secondo **divisore**, mentre il risultato è chiamato **quoziente**. Ad esempio nella sottrazione $6:3=2$, il numero 6 è il dividendo, il numero 3 è il divisore, mentre 2 è il quoziente di 10 diviso 5.

**IMPORTANTE!** Il divisore non può mai essere uguale a zero.

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. In pratica, il quoziente è quel numero che moltiplicato al divisore si ottiene il dividendo. Infatti, $6:3=2$ e $2\times3=6$.

Per i numeri interi, la divisione non è un'operazione interna, ma come abbiamo visto questo non vuol dire che non è sempre applicabile. Per il nostro esempio ($6:3=2$) diremo che il numero 6 è divisibile per il numero 3, in quanto il risultato è un numero intero.

In generale, diremo che un numero intero è **divisibile** per un secondo numero intero se la divisione del primo per il secondo produce come risultato un terzo numero intero.

**Proprietà invariantiva:**

***Def.***
In ogni divisione, moltiplicando uno stesso valore sia al dividendo che al divisore, il risultato non cambia.

Esempio: $+6:(-3)=-2$

Moltiplichiamo per $-4$ sia il dividendo che il divisore:

$+6\times(-4)=-24$ *Nuovo dividendo*
$-3\times(-4)=+12$ *Nuovo divisore*

Calcoliamo il risultato con il nuovo dividendo e il nuovo divisore:

$-24:12=-2$ *Il risultato non cambia!*

## Elevamento a potenza naturale di numeri interi

Anche per la potenza bisogna tener conto di un segno e precisamente del segno della base. Distinguiamo 2 casi.

***Base positiva:*** Quando la base è positiva, il segno del risultato è sempre positivo, e il modulo si calcola eseguendo il normale elevamento a potenza naturale di un numero naturale come descritto nel paragrafo precedente “Operazioni con i numeri naturali”.

Esempio: $(+2)^3=(+2)\times(+2)\times(+2)=+8$

***Base negativa:*** Quando la base è negativa invece, il segno del risultato è positivo se la potenza è pari, mentre, il segno del risultato è negativo se la potenza è dispari.

Esempio 1: $(-3)^2=(-3)\times(-3)=+9$ $\begin{cases}(-)^2=(-)\times(-)=(+)\\ 3^2=3\times3=9\end{cases}$

Esempio 2: $(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$ $\begin{cases}(-)^3=(-)\times(-)\times(-)=(+)\times(-)=(-)\\ 2^3=2\times2\times2=8\end{cases}$

**Attenzione!**
Il segno meno davanti ad una base non sempre indica che la base è negativa. La base per essere negativa, il segno meno deve essere racchiuso tra due parentesi insieme alla base, mentre l’esponente deve trovarsi fuori le parentesi.

Esempio 1: $(-3)^2$ Base negativa $(-3)^2=+9$
Esempio 2: $-3^2$ Base positiva, infatti, $-3^2=-(+3)^2=-(+9)=-9$

$\leftrightarrow$

# Divisibilità, scomposizione in fattori, mcm e MCD

## Criteri di divisibilità

**Divisibilità per 2:** Un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra è pari, cioè 0, 2, 4, 6, 8. Ad esempio 24 è divisibile per 2 in quanto la sua ultima cifra è 4, infatti, $24:2=12$.

**Divisibilità per 3:** Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è 3, 6 o 9, (nel caso in cui la somma risulti maggiore di 9, occorre eseguire nuovamente la somma delle cifre). Ad esempio proviamo con il 27, la somma delle cifre è $2+7=9$ per cui 27 è divisibile per 3, infatti, $27:3=9$. Proviamo con un altro esempio, il 48, la somma delle cifre è $4+8=12>9$, proseguiamo con la somma delle cifre $1+2=3$ per cui 48 è divisibile per 3, infatti, $48:3=16$.

**Divisibilità per 5:** Un numero è divisibile per 5 se e solo se la sua ultima cifra è 0 oppure 5. Ad esempio 35 è divisibile per 5 in quanto la sua ultima cifra è 5, infatti, $35:5=7$.

**Divisibilità per 9:** Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è 9, (nel caso in cui la somma risulti maggiore di 9, occorre eseguire nuovamente la somma delle cifre). Ad esempio proviamo con il 558, la somma delle cifre è $5+5+8=18$ maggiore di 9 per cui proseguiamo con la somma delle cifre, $1+8=9$, quindi 558 è divisibile per 9, infatti, $558:9=62$.

**Divisibilità per 10:** Un numero è divisibile per 10 se e solo se la sua ultima cifra è 0. Ad esempio 130 è divisibile per 10 in quanto la sua ultima cifra è 0, infatti, $130:10=13$.

## Scomposizione in fattori primi

I **divisori** di un numero naturale, sono tutti quei numeri per cui questo numero è divisibile, compreso il numero 1 e se stesso, ad esempio i divisori di 6 sono: 6, 3, 2 e 1.

Infatti, il numero 6 è divisibile per 6, 3, 2 e 1:

$$6:6=1 \qquad 6:3=2 \qquad 6:2=3 \qquad 6:1=6$$

I divisori diversi dal numero di partenza si chiamano **divisori propri**, ad esempio i divisori propri di 6 sono: 3, 2 e 1, cioè i divisori di 6 ad esclusione di se stesso.

Ci sono numeri come il 2, 3, 5, 7, 11 e tanti altri che hanno come divisori solo il numero 1 e se stessi, in pratica sono divisibili solo per ‘1’ e per se stessi. Tali numeri sono definiti **numeri primi**.

Vediamo la primalità dei primi 10 numeri naturali a partire dal numero 2:

| N | DIVISORI | PRIMO |
|---|---|---|
| 2 | 2, 1 | SI |
| 3 | 3, 1 | SI |
| 4 | 4, 2, 1 | NO |
| 5 | 5, 1 | SI |
| 6 | 6, 3, 2, 1 | NO |
| 7 | 7, 1 | SI |
| 8 | 8, 4, 2, 1 | NO |
| 9 | 9, 3, 1 | NO |
| 10 | 10, 5, 2, 1 | NO |

I numeri naturali non primi maggiori di 1 sono definiti **numeri composti**.

É possibile esprimere ogni numero composto come prodotto di numeri primi, eseguendo appunto la **scomposizione in fattori primi**. Esistono diversi metodi per scomporre un numero in fattori primi, e quello più semplice da eseguire con carta e penna è il metodo delle divisioni che si studia nella scuola secondaria di primo grado (ex scuola media).

Per scomporre un numero composto in fattori primi, occorre dividere il numero composto per i numeri primi, a partire dal più piccolo, per cui è divisibile. Quindi si parte dal numero 2, e quando non è più divisibile per 2 si passa al numero primo successivo, il 3, e così via finché non otteniamo 1 come risultato.

Ad esempio 2520,
- 2520 divisibile per 2 $(2520:2=1260)$
- 1260 divisibile per 2 $(1260:2=630)$
- 630 divisibile per 2 $(630:2=315)$

315 non è più divisibile per 2, quindi si passa al numero primo successivo cioè il 3;
- 315 divisibile per 3 $(315:3=105)$
- 105 divisibile per 3 $(105:3=35)$

35 non è più divisibile per 3, quindi si passa al numero primo successivo cioè il 5;
- 35 divisibile per 5 $(35:5=7)$

7 è un numero primo per cui può essere divisibile solo per 1 e se stesso;
- 7 divisibile per 7 $(7:7=1)$
- 1 siamo arrivati ad 1, quindi ci fermiamo qui.

Se proviamo a moltiplicare tutti i numeri con cui abbiamo diviso il 2520, quelli indicati in rosso, vedremo che il risultato è proprio 2520, infatti, $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2520$.

I fattori che si ripetono, cioè presenti più di una volta, vanno scritti una sola volta con esponente costituito da tante unità per quante volte compare come fattore.

Ad esempio il nostro 2520 può essere scritto anche nella seguente forma $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Infatti, il numero 2 compare 3 volte $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ e il numero 3 compare 2 volte $3 \times 3 = 3^2$.

## Massimo Comune Divisore (MCD)

Il **massimo comune divisore** (**MCD**) è il più grande divisore in comune tra 2 o più numeri naturali.

Presi due o più numeri naturali, questi, oltre al numero 1, potrebbero avere altri divisori comuni:

Ad esempio:

I divisori di 18 sono 18, 9, 6, 3, 2, 1
I divisori di 45 sono 45, 15, 9, 5, 3, 1

Osserviamo che tra 18 e 45 ci sono 3 divisori in comune (1, 3, e 9) e il numero 9 risulta il più grande tra questi ed è quindi il MCD tra 18 e 45.

Per calcolare il MCD tra più numeri bisogna scomporli in fattori primi, e fare il prodotto dei fattori comuni presi una sola volta con il minimo esponente.

Ad esempio calcoliamo il MCD tra 54 e 45

| | | |
|---|---|---|
| 54 | divisibile per 2 | $(54 : 2 = 27)$ |
| 27 | divisibile per 3 | $(27 : 3 = 9)$ |
| 9 | divisibile per 3 | $(9 : 3 = 3)$ |
| 3 | divisibile per 3 | $(3 : 3 = 1)$ |
| 1 | fermiamoci qui | |

| | | |
|---|---|---|
| 45 | divisibile per 3 | $(45 : 3 = 15)$ |
| 15 | divisibile per 3 | $(15 : 3 = 5)$ |
| 5 | divisibile per 5 | $(5 : 5 = 1)$ |
| 1 | fermiamoci qui | |

$54 = 2 \times 3^3$

$45 = 3^2 \times 5$

L'unico fattore comune è il 3 e l'esponente minore è il 2, $3^2 = 9$, per cui il MCD tra 54 e 45 è 9.

## Minimo Comune Multiplo (mcm)

Il **minimo comune multiplo** (**mcm**) è il più piccolo multiplo in comune tra 2 o più numeri naturali.

Due o più numeri naturali, hanno più multipli in comune e il più piccolo tra di loro è il minimo comune multiplo.

Ad esempio:

I multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, …

I multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, …

Osserviamo che tra i multipli in comune di 3 e 5 (15, 30, …) il numero 15 è il più piccolo ed è quindi il mcm tra 3 e 5.

Per calcolare il mcm tra più numeri, come per il MCD bisogna scomporli in fattori primi, e fare il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi una sola volta con il massimo esponente.

Ad esempio calcoliamo il mcm tra 84 e 90

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 84 | divisibile per 2 | $(84:2=42)$ | 90 | divisibile per 2 | $(90:2=45)$ |
| 42 | divisibile per 2 | $(42:2=21)$ | 45 | divisibile per 3 | $(45:3=15)$ |
| 21 | divisibile per 3 | $(21:3=7)$ | 15 | divisibile per 3 | $(15:3=5)$ |
| 7 | divisibile per 7 | $(7:7=1)$ | 5 | divisibile per 5 | $(5:5=1)$ |
| 1 | fermiamoci qui | | 1 | fermiamoci qui | |

$84=2^2\times3\times7$

$90=2\times3^2\times5$

I fattori sono 2, 3, 5 e 7. Il massimo esponente per 2 è 2, per 3 è 2, per 5 è 1 e per 7 è 1, $2^2\times3^2\times5\times7=1260$, per cui il mcm tra 84 e 90 è 1260.

↔

# Operazioni con le frazioni

In numeri razionali sono conosciuti anche come **numeri frazionari** e si esprimono quindi attraverso una frazione tra due numeri interi, ad esempio $+\frac{2}{3}$. Il numero che si trova sopra la linea di frazione, in questo caso il 2, si chiama **numeratore**, mentre 3, ossia il numero che si trova sotto la linea di frazione, si chiama **denominatore**.

In numeri razionali sono nati per dare un risultato a qualsiasi divisione, ad eccezione della divisione per 0, per cui il limite nell'esistenza della frazione è che il denominatore non può essere uguale a zero. Il simbolo utilizzato per indicare l'insieme dei numeri razionali è $\mathbb{Q}$.

Per quantificare numericamente il valore di una frazione, basta dividere il numeratore per il denominatore.

Esempio 1: $\frac{13}{4}$, $13:4=3,25$, $\frac{13}{4}=3,25$ un numero compreso tra 3 e 4, $3<\frac{13}{4}<4$.

Esempio 2: $-\frac{7}{5}$, $7:5=1,4$, $-\frac{7}{5}=-1,4$ un numero compreso tra -2 e -1, $-2<-\frac{7}{5}<-1$.

**Proprietà invariantiva delle frazioni:**

***Def.***
In ogni frazione, moltiplicando o dividendo uno stesso valore sia al numeratore che al denominatore, il valore della frazione non cambia.

Esempio: $\frac{3}{4}$, $3:4=0,75$, $\frac{3}{4}=0,75$

Moltiplichiamo per 2 sia il numeratore che il denominatore:

$3\times 2=6$ *Nuovo numeratore*
$4\times 2=8$ *Nuovo denominatore*

Calcoliamo il valore della frazione con i nuovi numeratore e denominatore:

$\frac{6}{8}$, $6:8=0,75$, $\frac{6}{8}=0,75$ *Il risultato non cambia!*

Questa proprietà è utilizzata anche per semplificare le frazioni ai minimi termini. La semplificazione avviene dividendo sia il numeratore che il denominatore via via per i loro divisori comuni maggiori di 1.

Ad esempio:

$\frac{30}{42}$ divisibili per 2 $30:2=15$ e $42:2=21$ per cui $\frac{30}{42}=\frac{15}{21}$

$\frac{15}{21}$ divisibili per 3 $15:3=5$ e $21:3=7$ per cui $\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$

$\frac{5}{7}$ 5 e 7 non hanno divisori comuni maggiori di 1, per cui la frazione è **ridotta ai minimi termini**.

Una frazione si dice **reciproco** di una seconda frazione se il suo numeratore corrisponde al denominatore della seconda frazione e se il suo denominatore corrisponde al numeratore della seconda frazione. Ad esempio il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$.

Una frazione avente denominatore unitario, cioè uguale ad uno, corrisponde al numero intero con le stesse unità del numeratore.

Esempio 1: $\frac{7}{1}=7$

Esempio 2: $-12=\frac{-12}{1}=-\frac{12}{1}$

## Addizione di frazioni

***Aventi lo stesso denominatore:*** La somma di due frazioni, aventi lo stesso denominatore, è una frazione costituita da un denominatore pari al denominatore dei due operandi e da un numeratore pari alla somma dei numeratori dei due operandi.

Ad esempio $\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7}$.

***<u>Aventi denominatore diverso:</u>*** La somma di due frazioni, aventi denominatori diversi, è una frazione costituita da un denominatore pari al mcm dei denominatori degli operandi e da un numeratore pari alla somma che ha come addendi:

1. Il prodotto del primo numeratore con il quoziente ottenuto dalla divisione del mcm con il primo denominatore;

2. Il prodotto del secondo numeratore con il quoziente ottenuto dalla divisione del mcm con il secondo denominatore;

(Il mcm dei denominatori è conosciuto anche come **minimo comune denominatore**.)

Ad esempio: $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$

1. Denominatore, il mcm tra 4 e 6 è 12

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{...+...}{12}$$

2. Numeratore

- Primo addendo
  - Divido in mcm con il primo denominatore: $12:4=3$ (quoto)
  - Moltiplico il quoto per il primo numeratore: $3\times 1=3$

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3+...}{12}$$

- Secondo addendo
  - Divido in mcm con il secondo denominatore: $12:6=2$ (quoto)
  - Moltiplico il quoto per il secondo numeratore: $2\times 5=10$

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3+10}{12}=\frac{13}{12}$$

***<u>Numero misto:</u>*** La somma, di un numero intero con una frazione, è una frazione costituita da un denominatore pari al denominatore della frazione operanda e da un numeratore pari alla somma che ha come addendi:

1. Il numeratore della frazione operanda;
2. Il numero moltiplicato per il denominatore.

Esempio 1: $\frac{2}{7}+3=\frac{2+(3\times 7)}{7}=\frac{2+21}{7}=\frac{23}{7}$

Esempio 2: $2+\frac{3}{4}=\frac{(4\times 2)+3}{4}=\frac{8+3}{4}=\frac{11}{4}$

## Sottrazione di frazioni

Per la sottrazione si procede in modo analogo all'addizione. Basta sostituire, nella costruzione del numeratore, la somma con la differenza.

Esempio 1: $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$

Esempio 2: $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{(3\times 3)-(2\times 1)}{12}=\frac{9-2}{12}=\frac{7}{12}$

Esempio 3: $\frac{7}{3}-3=\frac{7-(3\times 3)}{3}=\frac{7-9}{3}=-\frac{2}{3}$

Esempio 4: $2-\frac{1}{4}=\frac{(2\times 4)-1}{4}=\frac{8-1}{4}=\frac{7}{4}$

## Moltiplicazione di frazioni

Come per i numeri relativi, nella moltiplicazione dobbiamo tener conto dei segni degli operandi. Per costruire il risultato della moltiplicazione, dobbiamo eseguire tre operazioni:

1. La moltiplicazione dei segni
2. La moltiplicazione dei numeratori
3. La moltiplicazione dei denominatori

Esempio 1: $\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=+\frac{6}{35}$ $\quad (+)\times(+)=(+)$, $2\times 3=6$ e $5\times 7=35$

Esempio 2: $\frac{7}{5}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{21}{10}$ $\quad (+)\times(-)=(-)$, $7\times 3=21$ e $5\times 2=10$

Esempio 3: $-\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}=-\frac{14}{15}$ $(-)\times(+)=(-)$, $2\times7=14$ e $5\times3=15$

Un vantaggio nella moltiplicazione è che la riduzione ai minimi termini può essere applicata anche sui numeratori e denominatori dei singoli fattori. Questa processo è noto come **semplificazione**.

Ad esempio $\frac{15}{6}\times\frac{18}{3}$

In questo caso la riduzione ai minimi termini può avvenire tra un qualsiasi numeratore con un qualsiasi denominatore.

Il numero 15 (primo numeratore) può essere ridotto sia con il 6 che con il 3, così come il 18 (secondo numeratore).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{15}{6}\times\frac{18}{3}$ | 15 e 3 sono divisibili per 3 | $15:3=5$ e $3:3=1$ | $\frac{{}^{5}\cancel{15}}{6}\times\frac{18}{\cancel{3}_{1}}$ |
| $\frac{5}{6}\times\frac{18}{1}$ | 18 e 6, sono divisibili per 2 | $18:2=9$ e $6:2=3$ | $\frac{5}{{}_{3}\cancel{6}}\times\frac{\cancel{18}^{9}}{1}$ |
| $\frac{5}{3}\times\frac{9}{1}$ | 9 e 3, sono divisibili per 3 | $9:3=3$ e $3:3=1$ | $\frac{5}{{}_{1}\cancel{3}}\times\frac{\cancel{9}^{3}}{1}$ |
| $\frac{5}{1}\times\frac{3}{1}$ | ridotto ai minimi termini (semplificato) | $\frac{5}{1}\times\frac{3}{1}=\frac{15}{1}=15$ | |

## <u>Divisione di frazioni</u>

Per eseguire la divisione di frazioni, si trasforma l'operazione in una moltiplicazione di frazioni trasformando il secondo operando nel suo reciproco.

Ad esempio:

Esempio 1: $\left(+\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{7}{3}\right)$ il reciproco di $\left(+\frac{7}{3}\right)$ è $\left(+\frac{3}{7}\right)$, quindi

$$\left(+\frac{2}{5}\right):\left(+\frac{7}{3}\right)=\left(+\frac{2}{5}\right)\times\left(+\frac{3}{7}\right)=\left(+\frac{6}{35}\right)$$

Esempio 2: $\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(+\frac{5}{7}\right)$ il reciproco di $\left(+\frac{5}{7}\right)$ è $\left(+\frac{7}{5}\right)$, quindi

$$\left(-\frac{3}{2}\right):\left(+\frac{5}{7}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(+\frac{7}{5}\right)=\left(-\frac{21}{10}\right)$$

## Elevamento a potenza naturale di frazioni

Per eseguire l'elevamento a potenza naturale di una frazione occorre fare:

1. Potenza del segno
2. Potenza del numeratore
3. Potenza del denominatore

Esempio 1: $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^2}{2}=\frac{9}{4}$

Esempio 2: $\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{(-1)^2}{(5)^2}=\frac{1}{25}$

Esempio 1: $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{(-2)^3}{3^3}=\frac{-8}{27}=-\frac{8}{27}$

Esempio 1: $-\left(\frac{5}{7}\right)^2=-\frac{5^2}{7}=-\frac{25}{49}$

## Trasformazione di numeri decimali in frazioni

Richiamato dall'argomento1.

***Regola per i numeri decimali finiti non periodici*:** Si scrivono al numeratore tutte le cifre del numero decimale per intero senza la virgola e al denominatore un **1** con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola.

Esempio 1

Esprimere $123{,}4$ come frazione:

*Numeratore*: numero per intero senza virgola $\boxed{1234}$
*Denominatore*: **1**, con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola, una sola cifra, il 4, quindi un solo 0. $\boxed{10}$

$$123{,}4=\frac{1234}{10}$$

Esempio 2

Esprimere $11{,}273$ come frazione:

*Numeratore*: numero per intero senza virgola $\boxed{11273}$
*Denominatore*: **1**, con tanti **0** per quante sono le cifre dopo la virgola, 3 cifre, quindi tre **0**. $\boxed{1000}$

$$123{,}4 = \frac{11273}{1000}$$

***Regola per i numeri decimali finiti periodici***: Si scrivono al numeratore si sottrae al numero composto da tutte le cifre del numero decimale per intero senza la virgola il numero composto dalle sole cifre non periodiche, mentre al denominatore si scrivono tanti **9** per quante sono le cifre periodiche e tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola.

Esempio 1

Esprimere $12{,}3\overline{45}$ come frazione:

*Numeratore*: numero composto da tutte le cifre $12345$, numero composto dalle cifre non periodiche $123$, eseguire $12345-123$, risultato $\boxed{12222}$.
*Denominatore*: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 2 cifre; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 1 cifra: $\boxed{990}$

$$12{,}3\overline{45} = \frac{12222}{990}$$

Esempio 2

Esprimere $1{,}35\overline{32}$ come frazione:

*Numeratore*: numero composto da tutte le cifre $13532$, numero composto dalle cifre non periodiche $135$, eseguire $13532-135$, risultato $\boxed{13397}$.
*Denominatore*: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 2 cifre; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 2 cifre: $\boxed{9900}$

$$1{,}35\overline{32} = \frac{13397}{9900}$$

Esempio 3

Esprimere $4,\overline{3}$ come frazione:

*Numeratore*: numero composto da tutte le cifre $43$, numero composto dalle cifre non periodiche $4$, eseguire $43-4$, risultato $\boxed{39}$.
*Denominatore*: tanti **9** per quante sono le cifre periodiche, 1 cifra; tanti **0** per quante sono le cifre non periodiche dopo la virgola, 0 cifre: $\boxed{9}$

$$4,\overline{3}=\frac{39}{9}$$

↔

# Espressioni aritmetiche

Un'espressione aritmetica è un insieme di più operazioni aritmetiche, le quali vengono svolte in sequenza seguendo semplici regole di priorità. Risolvendo tutte le operazioni, alla fine rimane un solo numero: Il risultato.

## <u>Espressioni composte da sole addizioni</u>

In questo tipo di espressioni non esistono regole di priorità, nel senso che le addizioni possono essere eseguite in qualsiasi ordine. Questo grazie alle proprietà commutativa e associativa.

Ad esempio: $2+3+4$

Posso eseguire indifferentemente come prima addizione da svolgere sia $2+3$ che $3+4$.

$$\begin{cases} 2+3+4 = 5+4 = 9 \\ 2+3+4 = 2+7 = 9 \end{cases}$$

## <u>Espressioni composte da sole sottrazioni</u>

Nelle sottrazioni non valgono le proprietà commutativa e associativa, per cui non possono essere eseguite in qualsiasi ordine.

<u>*Regola di priorità*</u>:
Eseguire le sottrazioni nell'ordine scritto.

Ad esempio: $7-3-2$

Seguendo la regola di priorità, la prima sottrazione da svolgere è $7-3$.
Se così non fosse il risultato sarebbe diverso ed errato.

Procedimento corretto: $7-4-2 = 3-2 = 1$
Procedimento errato: $7-4-2 = 7-2 = 5$

## Espressioni composte da sole moltiplicazioni

Come per le espressioni di sole addizioni, non esistono regole di priorità, le moltiplicazioni possono essere eseguite in qualsiasi ordine. Questo sempre grazie alle proprietà commutativa e associativa.

Ad esempio: $2 \times 3 \times 4$

Posso eseguire indifferentemente come prima moltiplicazione da svolgere sia $2 \times 3$ che $3 \times 4$.

$$\begin{cases} 2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24 \\ 2 \times 3 \times 4 = 2 \times 12 = 24 \end{cases}$$

## Espressioni composte da sole divisioni

Nelle divisioni come per le sottrazioni non valgono le proprietà commutativa e associativa, per cui non possono essere eseguite in qualsiasi ordine. Vale la stessa regola di priorità delle sottrazioni.

*Regola di priorità*:
Eseguire le divisioni nell'ordine scritto.

Ad esempio: $24:3:2$

Seguendo la regola di priorità, la prima divisione da svolgere è $24:3$.

Procedimento corretto: $24:6:2 = 4:2 = 2$
Procedimento errato: $24:6:2 = 24:3 = 8$

## Espressioni con le quattro operazioni

Le quattro operazioni aritmetiche possiedono un grado di priorità diverso tra loro:

Il grado di priorità delle moltiplicazioni e delle divisioni è maggiore della priorità delle addizioni e delle sottrazioni. Per questo motivo, le moltiplicazioni e le divisioni vanno eseguite prima delle addizioni e delle sottrazioni.

*Regole di priorità*:

1. Individuare le moltiplicazioni e le divisioni ed eseguirle nell'ordine scritto;
2. Individuare le addizioni e le sottrazioni ed eseguirle nell'ordine scritto.

Esempio: $5+18:3\times 2-6-3$

Svolgimento:

$$5+\underbrace{18:3}_{\uparrow}\times 2-6-3= \qquad 18:3=6$$

$$=5+\underbrace{6\times 2}_{\uparrow}-6-3= \qquad 6\times 2=12$$

$$=\underbrace{5+12}_{\uparrow}-6-3= \qquad 5+12=17$$

$$=\underbrace{17-6}_{\uparrow}-3= \qquad 17-6=11$$

$$=11-3=8 \qquad \text{FINE!}$$

## **Espressioni con le potenze**

Le potenze hanno un grado di priorità maggiore delle quattro operazioni, quindi vanno eseguite prima.

*Regole di priorità*:

1. Individuare e risolvere le potenze;
2. Individuare le moltiplicazioni e le divisioni ed eseguirle nell'ordine scritto;
3. Individuare le addizioni e le sottrazioni ed eseguirle nell'ordine scritto.

Esempio: $5+18:3\times 2-3^2$

Svolgimento:

$$\underbrace{2^3}_{\uparrow}+18:3\times 2-\underbrace{3^2}_{\uparrow}= \qquad 2^3=8 \text{ e } 3^2=9$$

$$=8+\underbrace{18:3}_{\uparrow}\times 2-9= \qquad 18:3=6$$

$$=8+\underbrace{6\times 2}_{\uparrow}-9= \qquad 6\times 2=12$$

$$=\underbrace{8+12}_{\uparrow}-9= \qquad 8+12=20$$

$$=20-9=11 \qquad \text{FINE!}$$

## **Espressioni con le frazioni**

Nelle espressioni in cui sono presenti frazioni, occorre semplicemente **prima di qualsiasi operazione**, ridurre le frazioni ai minimi termini.

*Regole di priorità*:

1. Individuare le frazioni e ridurle ai minimi termini;
2. Individuare e risolvere le potenze;
3. Individuare le moltiplicazioni e le divisioni ed eseguirle nell'ordine scritto;
4. Se presente almeno una frazione eseguire il minimo comune denominatore di tutti I termini compresi I numeri non frazionari;
5. Individuare le addizioni e le sottrazioni ed eseguirle nell'ordine scritto.

Esempio: $\frac{7}{2}+21:3\times\frac{4}{6}-3^2$

Svolgimento:

$$\underbrace{\frac{7}{2}}_{\uparrow}+21:3\times\underbrace{\frac{4}{6}}_{\uparrow}-3^2 = \qquad \frac{7}{2} \text{ già ridotto} \qquad \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$=\frac{7}{2}+21:6\times\frac{2}{3}-\underbrace{3^2}_{\uparrow}= \qquad 3^2=9$$

$$=\frac{7}{2}+\underbrace{21:6}_{\uparrow}\times\frac{2}{3}-9= \qquad \text{21 non è divisibile per 6: } 21:6=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$=\frac{7}{2}+\underbrace{\frac{7}{2}\times\frac{2}{3}}_{\uparrow}-9= \qquad \frac{7}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{3}=\frac{7}{3}$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{3}-9= \qquad \text{mcm} = 6$$

$$=\frac{\underbrace{21+14}_{\uparrow}-54}{6}= \qquad 21+14=35$$

$$=\frac{35-54}{6}=-\frac{19}{6} \qquad \text{FINE!}$$

**Se nelle espressioni sono presenti numeri decimali, trasformarli in frazioni.**

## Espressioni con le parentesi

Abbiamo appena visto che le moltiplicazioni e le divisioni hanno un grado di priorità maggiore rispetto alle addizioni e alle sottrazioni. Quindi, se ci troviamo di fronte ad una addizione e una moltiplicazione, siamo costretti ad eseguire prima la moltiplicazione e poi la divisione.

Ad esempio: $2+3\times4=2+12=14$

Tuttavia, esiste la possibilità di eseguire prima l'addizione e poi la moltiplicazione. Come? Aumentando il grado di priorità dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, usando le parentesi:

Ad esempio: $(2+3)\times 4 = 5\times 4 = 20$

Le operazioni contenute nelle parentesi hanno un grado di priorità maggiore rispetto alle operazioni che si trovano all'esterno.

Internamente alle parentesi possono esserci intere espressioni le quali devono essere risolte utilizzando tutte le regole di priorità descritte finora.

In aritmetica esistono 3 tipi di parentesi:

1. Parentesi tonde $\left(\dots \quad \dots\right)$
2. Parentesi quadre $\left[\dots \quad \dots\right]$
3. Parentesi graffe $\left\{\dots \quad \dots\right\}$

- Le parentesi graffe possono contenere espressioni con parentesi tonde e quadre;
- Le parentesi quadre possono contenere parentesi tonde ma non graffe;
- Le parentesi tonde possono contenere solo espressioni senza parentesi;

$$\dots\dots\left\{\dots\dots\left[\dots\dots\left(\dots \quad \dots\right)\dots\dots\right]\dots\dots\right\}\dots\dots$$

Per questo motivo, nelle regole di priorità le parentesi tonde si trovano sul podio. Inoltre quando rimane un solo numero nelle parentesi, queste sono eliminabili, quindi si scrive solo il numero senza le parentesi.

_Regole di priorità_:

1. Risolvere le espressioni nelle parentesi tonde ed eliminare le parentesi tonde;

2. Risolvere le espressioni nelle parentesi quadre rispettando il grado di priorità delle operazioni, ed eliminare le parentesi quadre;

3. Risolvere le espressioni nelle parentesi graffe rispettando il grado di priorità delle operazioni, ed eliminare le parentesi graffe; (*A questo punto diventa un'espressione senza parentesi*)

4. Risolvere l'espressione finale senza le parentesi.

Non dimenticare che tutte le espressioni interne ed esterne alle parentesi vanno risolte rispettando sempre il grado di priorità delle operazioni.

Esempio: $\left\{1-\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]\right\}^2 \times \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)$

$$\left\{1-\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]\right\}^2 \times \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

prima le parentesi tonde fino ad eliminarle:

$$=\left\{1-\left[1-\left(\frac{2+1}{6}\right)\right]\right\}^2 \times \left(\frac{3+2}{4}\right)^2 =$$

$$=\left\{1-\left[1-\frac{3}{6}\right]\right\}^2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$$

$$=\left\{1-\left[1-\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}}\right]\right\}^2 \times \frac{25}{16} =$$

$$=\left\{1-\left[1-\frac{1}{2}\right]\right\}^2 \times \frac{25}{16} =$$

Terminate le parentesi tonde risolviamo le quadre:

$$=\left\{1-\left[\frac{2-1}{2}\right]\right\}^2 \times \frac{25}{16} = \left\{1-\frac{1}{2}\right\}^2 \times \frac{25}{16} =$$

Terminate le parentesi quadre risolviamo le graffe:

$$=\left\{\frac{2-1}{2}\right\}^2 \times \frac{25}{16} = \left\{\frac{1}{2}\right\}^2 \times \frac{25}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{25}{16}$$

Terminate le parentesi graffe risolviamo l'espressione finale:

$\frac{1}{4} \times \frac{25}{16} = \frac{25}{64}$ FINE!

## Schema riassuntivo di risoluzione

- Trasformare i numeri decimali in frazioni;
- Ridurre tutte le frazioni ai minimi termini;
- Nelle parentesi tonde ( ):
    - Risolvere le potenze;
    - Eseguire le divisioni e le moltiplicazioni nell'ordine scritto;
    - Eseguire le addizioni e sottrazioni nell'ordine scritto;
    - Ridurre le frazioni ai minimi termini;
- Eliminare le parentesi tonde;
- Nelle parentesi quadre [ ]:
    - Risolvere le potenze;
    - Eseguire le divisioni e le moltiplicazioni nell'ordine scritto;
    - Eseguire le addizioni e sottrazioni nell'ordine scritto;
    - Ridurre le frazioni ai minimi termini;
- Eliminare le parentesi quadre;
- Nelle parentesi graffe { }:
    - Risolvere le potenze;
    - Eseguire le divisioni e le moltiplicazioni nell'ordine scritto;
    - Eseguire le addizioni e sottrazioni nell'ordine scritto;
    - Ridurre le frazioni ai minimi termini;
- Eliminare le parentesi graffe;
- Risolvere le potenze;
- Eseguire le divisioni e le moltiplicazioni nell'ordine scritto;
- Eseguire le addizioni e sottrazioni nell'ordine scritto;
- Ridurre le frazioni ai minimi termini;

= FINE =